

三种损失函数下系统可靠度的Bayes算法*

——以串并联系统为例

康 达

(浙江工贸职业技术学院, 浙江 温州 325003)

摘 要: 损失函数是一种衡量损失和错误程度的函数, 将损失函数与Bayes统计相结合, 构建出系统可靠度及后验分布参数的三种损失函数的算法。文中选取双边截尾的样本, 当参数的先验分布服从伽玛分布时, 以串并联系统为例, 推导三种损失函数下的系统可靠度及后验分布参数的Bayes算法。并采用Monte-Carlo实验法随机产生多组数值取均值后, 计算出该三种损失函数可靠性的估计值。

关键词: 串并联系统; 可靠度; Bayes估计; 损失函数

中图分类号: O213.2

文献标识码: A

文章编号: 1672-0105(2017)03-0058-03

Bayes Algorithm of System Reliability Degree under three Kinds of Loss Functions

KANG Da

(Zhejiang Industry & Trade Vocational College, Wenzhou, 325003, China)

Abstract: Making use of the loss function is a property of measuring loss degree and error degree. The loss function is combined with Bayes statistics, which constructs three kinds of loss functions algorithm about system reliability and posterior distribution parameters. In this paper, we select bilateral truncated samples. when the prior distribution of the parameters obeys gamma distribution, and we take series-parallel system as an example to derive system reliability degree and the posterior distribution parameter of the Bayes algorithm under three kinds of loss function. Moreover, adopting Monte Carlo experiment method to generate the mean of multiple sets of values at random, the estimate of the reliability of the three kinds of loss functions is calculated.

Key words: series-parallel system; reliability degree; Bayes statistics; loss function

Bayes 理论方法在可靠性方面的研究比较广泛, 原因在于利用Bayes理论方法, 可以大大减少在可靠性分析中试验的次数, 这样不但可以节省成本而且还可以加快产品上市的时间, 深受人们的欢迎。对可靠性高、寿命长的产品进行寿命试验时, 人们通常用截尾试验, 因为截尾试验可以减小进入市场的周期, 还可以节约资金降低成本。

串并联系统是可靠性理论中的一个重要模型, 它是由 n 个独立的子系统串联而成, 第 i 个子系统又由 m_i 个独立的元件并联而成, 如图 1 所示, 对于 $i=1, 2, \dots, n$; $j=1, 2, \dots, m_i$, 第 i 个子系统的第 j 个元

件的可靠性为 $R_{ij}(t)$, 于是第 i 个子系统的可靠度为

$R_i(t) = 1 - \prod_{j=1}^{m_i} [1 - R_{ij}(t)]$, 由文献 [1] 可知,

$R(t) = \prod_{i=1}^n \left\{ 1 - \prod_{j=1}^{m_i} [1 - R_{ij}(t)] \right\}$, 当所有 $R_{ij}(t) = R_0(t) = e^{-\lambda t}$,

所有 $m_i = m$ 时, 有 $R(t) = \left[1 - (1 - e^{-\lambda t})^m \right]^n$ 。 [1]

1 双边定数截尾试验

在众多截尾试验中, 双边定数截尾是用得比较广泛的, 它假定选取 n 个产品投入试验, 规定试验进行到有 r ($1 \leq r \leq n$) 个产品失效时终止, 也即为定

收稿日期: 2017-09-26

基金项目: 2016年度浙江工贸职业技术学院第二期教师科技创新活动计划项目 (G160211)

作者简介: 康达, 男, 硕士, 浙江工贸职业技术学院讲师, 研究方向: 系统可靠性。

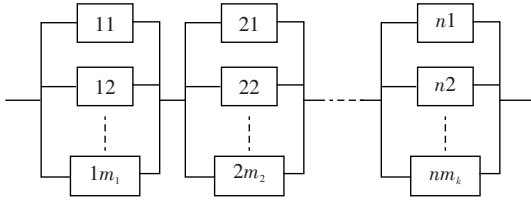


图1

数截尾寿命试验, 设观测到的次序失效数据为 $x_1 \leq x_2 \leq \dots \leq x_r$, 假设前 $s-1$ 个数据丢失, 则此时我们观测的次序统计量为 $x_s \leq x_{s+1} \leq \dots \leq x_r$, $1 \leq s \leq r \leq n$, 此截尾方法得到的样本, 即为双边定数截尾样本。^[2-3]

对于双边定数截尾样本, 记 $x = (x_s, x_{s+1}, \dots, x_{r-1}, x_r)$ 的联合分布密度 (似然函数) 为

$$l(x_s, x_{s+1}, \Lambda x_{r-1}, x_r) = \frac{n!}{(n-r)!(s-1)!} \prod_{i=s}^r f(x_i) [F(x_i)]^{s-1} [1-F(x_r)]^{n-r} \quad (1)$$

每个试验的部件服从参数为 μ 的指数分布似然函数如下:

$$l(x_s, x_{s+1}, \Lambda x_{r-1}, x_r) = \frac{n!}{(n-r)!(s-1)!} \mu^{r-s+1} (1-e^{-\mu x_s})^{s-1} \exp\left\{-\mu \left[\sum_{i=s}^r x_i + (n-r)x_r\right]\right\} \quad (2)$$

令 $h(x|\mu) = l(x_s, x_{s+1}, \Lambda x_{r-1}, x_r)$, 再由 Bayes 方法假设指数分布的参数 μ 服从 $Ga(\mu|\alpha, \lambda) = \frac{\lambda^\alpha}{\Gamma(\alpha)} \mu^{\alpha-1} e^{-\lambda\mu}$ 的伽玛先验分布, 其中 α 和 λ 为给定的常数, 因此, μ 的后验分布为

$$f(\mu|x) = \frac{h(x|\mu)P(\mu|\alpha, \lambda)}{\int_0^\infty h(x|\mu)P(\mu|\alpha, \lambda)d\mu} \quad (3)$$

将 (2) 和 $Ga(\mu|\alpha, \lambda)$ 代入 (3) 有

$$f(\mu|x) = \frac{\mu^{\alpha+r-s} (1-e^{-\mu x_s})^{s-1} \exp\{-\mu[\sum_{i=s}^r x_i + (n-r)x_r + \lambda]\}}{\int_0^\infty \mu^{\alpha+r-s} (1-e^{-\mu x_s})^{s-1} \exp\{-\mu[\sum_{i=s}^r x_i + (n-r)x_r + \lambda]\} d\mu} \\ = \frac{\sum_{j=0}^{s-1} \binom{s-1}{j} (-1)^j \mu^{\alpha+r-s} \exp\{-\mu[(n-r)x_r + \sum_{i=s}^r x_i + \lambda + jx_s]\}}{\int_0^\infty \sum_{j=0}^{s-1} \binom{s-1}{j} (-1)^j \mu^{\alpha+r-s} \exp\{-\mu[(n-r)x_r + \sum_{i=s}^r x_i + \lambda + jx_s]\} d\mu}$$

令 $b = \alpha + r - s$, $a_j = [(n-r)x_r + \sum_{i=s}^r x_i + \lambda + jx_s]$,

$A = \sum_{j=0}^{s-1} \binom{s-1}{j} (-1)^j \frac{\Gamma(b+1)}{a_j^{b+1}}$, 因此 μ 的后验分布可以表示如下:^[4]

$$f(\mu|x) = A^{-1} \sum_{j=0}^{s-1} \binom{s-1}{j} (-1)^j \mu^b \exp\{-a_j \mu\} \quad (4)$$

2 系统可靠度算法

2.1 SE 损失函数 Bayes 可靠度

在 SE 损失函数 $L(\lambda, \delta(x)) = (\delta(x) - \lambda)^2$, 它是一种对称的损失函数, 它的参数的估计就是其后验期望, 由此可直接对 μ 和 $R(t)$ 求 Bayes 估计。^[5]

$$\mu_{BS} = \int_0^\infty \mu A^{-1} \sum_{j=0}^{s-1} \binom{s-1}{j} (-1)^j \mu^b \exp\{-a_j \mu\} d\mu \\ = A^{-1} \sum_{j=0}^{s-1} \binom{s-1}{j} (-1)^j \frac{\Gamma(b+2)}{a_j^{b+2}}$$

$$R_{BS}(t) = \int_0^\infty [1 - (1 - e^{-\mu t})^n] A^{-1} \sum_{j=0}^{s-1} \binom{s-1}{j} (-1)^j \mu^b \exp\{-a_j \mu\} d\mu \\ = A^{-1} \sum_{j=0}^{s-1} \binom{s-1}{j} (-1)^j G_j(t)$$

其中 $G_j(t) = \int_0^\infty [1 - (1 - e^{-\mu t})^n] \mu^b \exp\{-a_j \mu\} d\mu$ 。

2.2 BL 损失函数 Bayes 可靠度

BL 损失函数是非对称损失函数, 在日常生活中, 我们都知道高估计对低估计来讲, 高估计带来的损失要大些。因此, 非对称的损失函数, 逐渐受到了人们的重视, BL 损失函数为 $L(\lambda, \delta(x)) \propto \exp(a(\delta(x) - \lambda)) - a(\delta(x) - \lambda) - 1, a \neq 0$ 下 λ 的 Bayes 估计为 $\lambda_{BL} = -a^{-1} \ln\{E_\lambda[\exp(-a\lambda)]\}$ 。因此 μ 和 $R(t)$ 的 Bayes 估计如下:

$$\mu_{BL} = -a^{-1} \ln\{E_\mu[\exp(-a\mu)]\} \\ = -a^{-1} \ln\left\{\int_0^\infty \exp(-a\mu) A^{-1} \sum_{j=0}^{s-1} \binom{s-1}{j} (-1)^j \mu^b \exp\{-a_j \mu\} d\mu\right\} \\ = -a^{-1} \ln\left\{A^{-1} \sum_{j=0}^{s-1} \binom{s-1}{j} (-1)^j \int_0^\infty \mu^b \exp\{-(a+a_j)\mu\} d\mu\right\} \\ = -a^{-1} \ln\left\{A^{-1} \sum_{j=0}^{s-1} \binom{s-1}{j} (-1)^j \frac{\Gamma(b+1)}{(a+a_j)^{b+1}}\right\}$$

$$R_{BL}(t) = -a^{-1} \ln\{E_\mu[\exp(-aR(t))]\} \\ = -a^{-1} \ln\left\{\int_0^\infty \exp\{-a[1 - (1 - e^{-\mu t})^n]\} A^{-1} \sum_{j=0}^{s-1} \binom{s-1}{j} (-1)^j \mu^b \exp\{-a_j \mu\} d\mu\right\} \\ = -a^{-1} \ln\left\{A^{-1} \sum_{j=0}^{s-1} \binom{s-1}{j} (-1)^j \int_0^\infty \mu^b \exp\{-a[1 - (1 - e^{-\mu t})^n] - a_j \mu\} d\mu\right\} \\ = -a^{-1} \ln\left\{A^{-1} \sum_{j=0}^{s-1} \binom{s-1}{j} (-1)^j T_j(t)\right\}$$

其中 $T_j(t) = \int_0^\infty \mu^b \exp\{-a[1 - (1 - e^{-\mu t})^n] - a_j \mu\} d\mu$

2.3 GE 损失函数 Bayes 可靠度

GE 损失函数也是一种非对称的损失函数, GE 损失函数为 $L(\lambda, \delta(x)) \propto (\delta(x)/\lambda)^q - q \ln(\delta(x)/\lambda) - 1$ 下, λ 的 Bayes 估计 λ_{BG} 为 $\lambda_{BG} = [E_\lambda(\lambda^{-q})]^{-1/q}$ 。

因此, μ 和 $R(t)$ 的 Bayes 估计如下:

$$\begin{aligned}\mu_{BG} &= [E_{\mu}(\mu^{-q})]^{-1/q} \\ &= [\int_0^{\infty} \mu^{-q} A^{-1} \sum_{j=0}^{s-1} \binom{s-1}{j} (-1)^j \mu^b \exp\{-a_j \mu\} d\mu]^{-1/q} \\ &= [A^{-1} \sum_{j=0}^{s-1} \binom{s-1}{j} (-1)^j \int_0^{\infty} \mu^{(b-q)} \exp\{-a_j \mu\} d\mu]^{-1/q} \\ &= [A^{-1} \sum_{j=0}^{s-1} \binom{s-1}{j} (-1)^j \frac{\Gamma(b-q+1)}{a_j^{b-q+1}}]^{-1/q}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}R(t)_{BG} &= [E_{\mu}(R(t)^{-q})]^{-1/q} \\ &= [\int_0^{\infty} [1 - (1 - e^{-u})^m]^{-q} A^{-1} \sum_{j=0}^{s-1} \binom{s-1}{j} (-1)^j \mu^b \exp\{-a_j \mu\} d\mu]^{-1/q} \\ &= [A^{-1} \sum_{j=0}^{s-1} \binom{s-1}{j} (-1)^j \int_0^{\infty} [1 - (1 - e^{-u})^m]^{-q} \mu^b \exp\{-a_j \mu\} d\mu]^{-1/q} \\ &= [A^{-1} \sum_{j=0}^{s-1} \binom{s-1}{j} (-1)^j Q_j(t)]^{-1/q}\end{aligned}$$

$$\text{其中 } Q_j(t) = \int_0^{\infty} [1 - (1 - e^{-u})^m]^{-mq} \mu^b \exp\{-a_j \mu\} d\mu$$

3 实验模拟

根据具体情况, 确定串并联 k 和第 i 个子系统的 m_i 的个数, 给定 α 和 λ 的值确定指数分布参数 μ 的先验分布, 之后根据 (4) 式的计算过程, 通过 MATLAB 等软件, 求出 μ 的后验分布 $f(\mu|x)$, 利用 Monte-Carlo 法随机产生多组 μ 值取均值后, 分别在 SE 损失函数、BL 损失函数、GE 损失函数的条件下进行对 μ 进行 Bayes 估计和 $R(t)$ 的 Bayes 估计得到 μ_{BS} , $R_{BS}(t)$, μ_{BL} , $R_{BL}(t)$, μ_{BG} , $R(t)_{BG}$ 。

假设是 $k=2$ 和 $m_i=2$ 串并联系统, 在不同的 α 和 λ 下, 计算出 μ_{BS} , $R_{BS}(t)$, μ_{BL} , $R_{BL}(t)$, μ_{BG} , $R(t)_{BG}$ 的值如 1 所示。

通过上述模拟结果上来看, 可以发现通过 SE 损失函数、BL 损失函数、GE 损失函数的串并联系统可靠度估计值依次升高。SE 损失函数为对称性的

表 1 三种损失函数下 Bayes 估计值

(α, λ)	μ_{BS}	$R_{BS}(t)$	μ_{BL}	$R_{BL}(t)$	μ_{BG}	$R(t)_{BG}$
(0.5, 1)	0.0451	0.7326	0.0513	0.8061	0.0633	0.8124
(0.6, 1)	0.0391	0.8197	0.0471	0.8215	0.0591	0.8341
(0.7, 1)	0.0214	0.6871	0.0394	0.7146	0.0492	0.7324
(0.8, 1)	0.0201	0.8041	0.0352	0.8047	0.0451	0.8149
(0.9, 1)	0.0193	0.7647	0.0297	0.7943	0.0423	0.7967
(0.5, 2)	0.0354	0.6912	0.0454	0.7311	0.0541	0.7412
(0.6, 2)	0.0346	0.6847	0.0422	0.7141	0.0462	0.7214
(0.7, 2)	0.0301	0.6914	0.0316	0.7614	0.0396	0.7689
(0.8, 2)	0.0291	0.7243	0.0297	0.7349	0.0357	0.7478
(0.9, 2)	0.0288	0.7094	0.0283	0.7142	0.0324	0.7341

损失函数, 其对称性的特性与系统可靠度走势吻合度不高, 从数据上来看, 确实效果不佳。BL 损失函数、GE 损失函数为非对称的损失函数都比较合适系统可靠性的研究工作, 从结果上来看, GE 损失函数更合适串并联系统。

4 总结

在工程上最关心的是系统的可靠度或耐用能力, 如果可靠性的比较高, 说明该系统比较稳定而且耐用。因此, 系统的可靠度的研究是十分必要且意义重大的。串并联系统是可靠性数学里一个常见的系统, 很多网络和电子产品都可以认为是一个串并联系统, 从而利用该系统评定产品和网络的可靠性。Bayes 方法简便实用, 而且极大地提高了已有参数估计方法的精度, 在工程实际中有很大的应用价值。Bayes 理论方法在可靠性方面的研究发展比较广范, 利用 Bayes 理论方法, 可以减小在可靠性分析中试验的次数, 深受人们欢迎。

参考文献:

- [1] 李凌, 师义民, 李明海. 逐步增加的 II 型截尾下冷贮备串联系统可靠性指标的 Bayes 估计[J]. 工程数学学报, 2007, 24(5): 895-901.
- [2] 冯艳, 师义民, 严惠元. 定数截尾两参数指数——威布尔分布形状参数的 Bayes 估计[J]. 数学的实践与认识, 2007, 37(5): 37-45.
- [3] 师义民. 双边截断型分布族参数的经验 Bayes 估计[J]. 高校应用数学学报 A 辑, 2000, 15A(4): 475-483.
- [4] 李秀春, 师义民, 魏杰琼. 冷贮备串联系统可靠性指标的经验 Bayes 近似置信限[J]. 系统工程, 2005, 23(3): 101-104.
- [5] 康达. 串并联系统可靠度的 Bayes 估计及 Bayes 置信限[J]. 温州大学学报, 2010, 31(3): 17-23.

(责任编辑: 尹清杰)